

Part I

MATEMATİK-I (SORULAR)

1 FONKSİYONLAR VE GRAFİKLERİ

1. Aşağıda verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

d) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x^2-5x}}$

f) $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{3-[x]}}$

g) $f(x) = \frac{3x+|x|}{x}$

h) $f(x) = x - [x]$

i) $f(x) = \sqrt{3-x} + \arccos\left(\frac{x-2}{3}\right)$

j) $f(x) = \sqrt{16-x^2} \arcsin\left(\frac{3}{x^2-1}\right)$

k) $f(x) = \sqrt{(2-x) \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$

l) $f(x) = \sqrt{\frac{\arcsin \frac{x}{2}}{x^2-1}}$

m) $f(x) = \sqrt{\frac{\ln(x-1)}{x^2-7x+12}}$

n) $f(x) = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}$

o) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{\sqrt{3-[x]}}\right)$

2. Tabanı, bir kenarı x br olan bir kare, hacmi 125 br^3 olan dikdörtgenel bir kutunun yüzey alanını x cinsinden ifade ediniz. Bulunan fonksiyonun tanım kümesi nedir?

3. Bir dikdörtgenin çevresi 20 m dir. Dikdörtgenin alanını, kenarlarından birinin uzunluğunun fonksiyonu olarak yazınız.

4. Bir küpün yüzey alanını hacminin fonksiyonu olarak ifade ediniz.

5. Boyutları 12 cm ve 20 cm olan bir kartondan üstü açık bir kutu, köşelerinden bir kenarı x uzunluğunda olan kareler kesilerek ve kenarlar katlanarak yapılacaktır. Kutunun hacmini x in fonksiyonu olarak ifade ediniz.

6. Aşağıdaki fonksiyonların grafiklerini çiziniz

- a) $f(x) = \lfloor x \rfloor$
b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$
d) $f(x) = |x - 3| + |x + 2|$
e) $f(x) = |x^2 - 1|$
f) $f(x) = \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$
g) $f(x) = |x^2 - 4|x||$
7. $y = \sqrt{x}$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak, $y = \sqrt{x - 2}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.
8. $f(x) = \frac{x}{2}$ ve $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ fonksiyonlarının grafiklerini birlikte çizin. $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ eşitsizliğini sağlayan x noktalarının kümesini belirleyin.
9. $y = x^2$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $y = x^2 + 6x + 10$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
10. Bir tarafı duvar olan dikdörtgenel bir kümes yapmak isteyen bir çiftçiye duvarı boyamak için 11ira ve diğer üç kenarın çitini çekmek için metresine 5 lira maliyet çıkarılıyor. Öte yandan çiftçinin bu iş için ayırdığı para 180 liradır. Kümesin duvara yaslanan kenar x metre ve diğer kenarı y metre olduğuna göre en büyük alana sahip kümesin boyutları ne olmalıdır?
11. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ve $g(x) = \frac{x+1}{x+2}$ olsun. $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$ fonksiyonları ile bunların tanım kümelerini bulunuz.
12. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ ile verilen g nin bir tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.
13. $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere $\tan x = \frac{3}{5}$ ve $\cot y = \frac{5}{12}$ ise $\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}$ ifadesini hesaplayınız.
14. $f(x) = \cos x + \sin^2 x$ fonksiyonu periyodik midir? Araştırmız. Bu fonksiyonun çift veya tek olup olmadığını araştırmız.
15. $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin 2x$ fonksiyonu periyodiktir. Bu fonksiyonun periyodu nedir?
16. f ve g verilen iki fonksiyon ve bileşkeleri $h = f \circ g$ olsun.
(a) g çift fonksiyon ise h daima çift midir? Açıklayınız.
(b) g tek fonksiyon ise h daima tek midir? Açıklayınız.
17. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - x}}}$ ve $g(x) = x \arcsin(1 - x^2)$ fonksiyonlarının tanım kümesini bulunuz.
18. $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ olduğunu gösteriniz.

19. $f : (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(\frac{1+\tan x}{1-\tan x})$ ile tanımlı fonksiyonun tek veya çift olup olmadığını araştırınız.
20. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ olduğunu gösteriniz.
21. $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ olarak tanımlanıyor. f nin ters fonksiyonunu bulunuz.
22. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $g(x) = \frac{1-x}{x}$ ve $h(x) = \frac{1}{x-2}$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.
23. $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $g(x) = \ln(\frac{1}{x})$ ve $h(x) = |\ln x|$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
24. $y = f(x)$ fonksiyonu $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}$ eşitliğini sağlayan birebir bir fonksiyon ise $f^{-1}(x)$ nedir? $f^{-1}(1) = ?$
25. $f(x) = \log_9(5x + 7)$ ve $g(x) = e^{\sqrt{x+5}}$ ise $(f \circ g^{-1})(e^3) = ?$
26. $f(x) = \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 2}\right)$ fonksiyonunu biri tek biri çift olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazınız.
27. $f(x) = x^3$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak $g(x) = 1 - (x + 2)^3$ ve $h(x) = 1 + |x|^3$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.
28. $f(x) = x[x]$ fonksiyonunun $[-2, 2]$ aralığındaki grafiğini çiziniz. Bundan yararlanarak $g(x) = x[x] + 2$ ve $h(x) = -x[x]$ fonksiyonlarının aynı aralıktaki grafiklerini çiziniz.
29. $f : \mathbb{R} \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$ fonksiyonunun bir periyodunu belirleyiniz ve f nin grafiğini çiziniz.

2 LİMİT VE SÜREKLİLİK

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} = \frac{5}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-1}{x^3-1} = \frac{4}{3}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1} = -\frac{1}{3}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}} = 16$

2. $f(x) = x - [x]$ fonksiyonunun $x = 2$ ve $x = \frac{3}{2}$ noktalarında limitinin olup olmadığını araştırınız.

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x|}{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x^2| - 9}{x - 3} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{81} - 1}{x} = 81$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{5x} - 5\sqrt{x}}{x - 5} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+1}}{x} = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 5}) = \frac{1}{2}$

ı) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [\sin x] = 0$

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin x|}{\sin x} = 0$

j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin x}{x + \sin x} = 0$

k) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x \cos x} = 0$

l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}} = 1$

m) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

n) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) = 0$

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

ö) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

p) $\lim_{x \rightarrow 2} ([x] + [-x]) = -1$

r) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \alpha x}{x^2} = \frac{1}{2}\alpha^2$

ş) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x - \tan \alpha x}{x^3} = -\frac{1}{2}\alpha^3$

u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 + \tan x}}{x^3} = -\frac{1}{4}$

ü) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 3x - \cos^3 2x}{x^2} = -\frac{15}{2}$

v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1} 3x}{x} = 3$

y) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 2x}{\sin 5x} = \frac{2}{5}$

$$z) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\arcsin x - \frac{\pi}{6}}{x - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{3}$$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

$$a) \lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin^{-1} x - \sin^{-1} y}{x - y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Çözüm: $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = t$ diyelim. O zaman $x \rightarrow y \Rightarrow t \rightarrow 0$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} x &= \sin(t + \sin^{-1} y) \\ &= \sin t \cos(\sin^{-1} y) + \sin(\sin^{-1} y) \cos t \\ &= \sqrt{1-y^2} \sin t + y \cos t \end{aligned}$$

olacağından

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow y} \frac{\sin^{-1} x - \sin^{-1} y}{x - y} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{1-y^2} \sin t + y \cos t - y} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-y^2} \frac{\sin t}{t} + y \frac{\cos t - 1}{t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

bulunur.

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow y} \frac{\arctan x - \arctan y}{x - y} = \frac{1}{y^2 + 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - \sqrt{x})}{x - 1} = -\frac{1}{2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sin \sqrt{x} - \sin 3}{x - 9} = \frac{1}{6} \cos 3$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|2x - 1| - |2x + 1|}{x} = -4$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi + x) + 1}{x} = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \frac{\cos(\pi x)}{8x^3 - 16x^2 - 25} = -\frac{1}{70} \pi$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan(4x)} = \frac{1}{4}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x - 2} = \frac{1}{4} \pi$$

$$l) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\theta) - \sin(\theta^2)}{\theta^4} = -\frac{1}{3}$$

Çözüm Aşağıdaki n şıkında $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ eşitliğinin sağlandığı gösterilmektedir. Bu bilgi kullanılarak

$$\begin{aligned}
\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\theta) - \sin(\theta^2)}{\theta^4} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\theta) - \theta^2 + \theta^2 - \sin(\theta^2)}{\theta^4} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin^2(\theta) - \theta^2}{\theta^4} + \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta^2 - \sin(\theta^2)}{\theta^4} \\
&= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{(\sin \theta - \theta)(\sin \theta + \theta)}{\theta^3 \theta} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^2} \\
&= 2 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta - \theta}{\theta^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} t \\
&= 2\left(-\frac{1}{6}\right) + 0 \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

bulunur.

$$l) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos(3x)} = \frac{2}{9}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} (\csc^2 x - x^{-2}) = \frac{1}{3}$$

Çözüm

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} (\csc^2 x - x^{-2}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \sin^2 x} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)(x + \sin x) x^2}{x^2 \sin^2 x x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin x}{x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}
\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ limiti için $x = 3t$ diyelim. O zaman $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$ olur. Ayrıca $\sin(3t) = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3t - 3 \sin t + 4 \sin^3 t}{27t^3} \\
&= \frac{1}{9} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 t}{27t^3} \\
&= \frac{1}{9} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} + \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\left(1 - \frac{1}{9}\right) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{4}{27}$$

olup

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

bulunur. Sonuçta

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\csc^2 x - x^{-2}) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^3 \cot x} = 2$

ö) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(3 \sin 2x)}{x} = 6$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{x} = 1$

r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x}\right)^{2x} = e^{-6}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Çözüm $e^x - 1 = t$ diyelim. O zaman $x \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0$ olur. Ayrıca $x = \ln(1+t)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} \\ &= \frac{1}{\ln e} = 1 \end{aligned}$$

olur.

ş) $\lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \tan \frac{x}{2} = -2$

t) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\tan(x^2 - 1)} = \frac{1}{2} \pi$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ eşitliğini sağlayan a ve b değerlerini bulunuz.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \tan^3 x} - 1}{x^3} = ?$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + \arcsin x}{\sin 3x} = ?$

8. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = -3$$

olduğuna göre $f(0)$ nedir?

9. $f(x) = (x^2 + 1) \sin x$ olsun. $f(c) = 1$ olacak şekilde bir c reel sayısının var olduğunu gösteriniz.

10. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $x \neq 3$ için $|g(x)| \leq f(x)$ ve $f(3) = 0$ ise $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ limitini hesaplayınız.

11. $f(x) = \begin{cases} ax + b & , \quad x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b & , \quad 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5 & , \quad x > 2 \end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun her yerde sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

12. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{x} & , \quad x > 0 \\ b & , \quad x = 0 \\ \frac{1 - \cos cx}{x^2} & , \quad x < 0 \end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun 0 da sürekli olması için a, b ve c arasında nasıl bir ilişki olmalıdır?

13. Aşağıda verilen fonksiyonların $x = 0$ da sürekli olup olmadıklarını araştırmamız.

a) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1)}{x} = 2$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - f(1-x)}{x} = ?$

15. $f(x) = \begin{cases} ax - [x] & , \quad x > 1 \\ 2 - a \cos \pi x & , \quad x < 1 \end{cases}$ olsun. f nin $x = 1$ de sürekli olması için $f(1)$ nasıl tanımlanmalıdır.

16. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 2} & , \quad x \neq 1 \text{ ve } x \neq -2 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ 3 & , \quad x = -2 \end{cases}$ ile tanımlı fonksiyonun süreksiz olduğu noktaları ve bu noktalardaki süreksizlik çeşitlerini belirleyiniz.

17. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x \leq -1 \\ ax + b & , \quad -1 < x \leq 1 \\ 2 + \frac{\sin(x-1)}{x-1} & , \quad x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun \mathbb{R} de sürekli olması için a ve b ne olmalıdır.

$$18. f(x) = \begin{cases} \frac{\sec ax - 1}{2x^2} & , x < 0 \\ 1 & , x = 0 \\ \frac{\sqrt{bx^2 + c}}{\sin 2x} & , x > 0 \end{cases} \text{ ile tanımlı fonksiyonun } x = 0 \text{ nok-}$$

tasında sürekli olabilmesi için a, b ve c ne olmalıdır? Cevabımızı açıklayınız.

$$19. f(x) = \begin{cases} a + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , x > 0 \\ 2 & , x = 0 \\ \frac{\sqrt[3]{bx^3 + c} - 1}{\sin^3 x} & , x < 0 \end{cases} \text{ ile tanımlı fonksiyonun } x = 0 \text{ nok-}$$

tasında sürekli olabilmesi için a, b ve c ne olmalıdır? Cevabımızı açıklayınız.

20. Aradeğer teoremini ifade ediniz. Bu teoremi dikkate alarak $y = x^3$ eğrisi ile $y = 3x + 1$ doğrusunu kesiştiğini gösteriniz

21. $f(x) = \frac{\sin(x-4)}{x^2-3x-4}$ olsun. $x \neq 4$ için $f(x) = g(x)$ olmak üzere $x = 4$ noktasında sürekli olan bir g fonksiyonu bulunuz.

22. $f(x) = \cos x$ fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

23. $\cos x = x$ denkleminin $(0, 1)$ aralığında bir kökünün var olduğunu gösteriniz.

24. $\ln x = e^{-x}$ denkleminin $(1, 2)$ aralığında bir kökünün var olduğunu gösteriniz.

25. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x < 0 \\ e^x & , 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & , x > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları bulunuz. Bunların hangisinde f soldan, sağdan sürekli veya süreksizdir. f nin grafiğini çiziniz.

26. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu için $f(0) = 2$ ve $f(1) = \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $f(c^2) = [f(c)]^2$ eşitliğini sağlayan bir c reel sayısının var olduğunu gösteriniz.

27. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon, $f(0) = 5$, $f(1) = 4$ ve $f(2) = 9$ olsun. Bu durumda $2f(c) = f(2c)$ koşulunu sağlayan c sayısı var mıdır? Cevabımızı açıklayınız.

28. $\lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x-5} = 2$ olduğunu matematiksel tanımı kullanarak gösteriniz.

29. $f(x) = 2 - x$ fonksiyonunu 0 noktasındaki limitinin 1 olmadığını uygun bir $\varepsilon > 0$ seçip matematiksel tanımı kullanarak gösteriniz.

30. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{n}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x} = \frac{1}{3}$
c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{x-2}} = 0$
d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1}) = 0$
f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-x+1} - x + 1) = \frac{1}{2}$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{\ln(\tan x)} = 0$
h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x} = \frac{1}{2}$
i) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}} = -\sqrt{2}$
i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\sin 2x}{\sin x - \cos x} = 0$
j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\cos 2x} = 1$
k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{4x - \pi} = -\frac{1}{2}$
l) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - \tan^2 x} = \frac{1}{4}$
i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{28} - 1}{x} = 28$
j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} = 4$
k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$
l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$
v) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan x - \sin x}{x^3} + \frac{\sin x - x}{x^3} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} + \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}}_{=-1/6} \\
&= -\frac{1}{6} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \\
&= -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

y) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x - \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \frac{x^3}{x - \tan x} = \left(-\frac{1}{6}\right) (-3) = \frac{1}{2}$$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1 + \cos^2 x}{x^4 + x^3 \sin x} = \frac{1}{6}$

- m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = -\frac{1}{3}$
n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{2x+1} = e^2$
o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{\sin 2x} = 3$
ö) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x} - \sqrt{x}}{x} = \infty$
p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sin \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$
r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = 0$
s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} = 0$
ş) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(\pi \cos^2 x)}{x^2} = -\pi$
t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1 - \frac{1}{n})^4}{1 - (1 - \frac{1}{n})^3} = \frac{4}{3}$
u) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{x} = 2$
ü) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos x}{\tan 2x^2} = -2$
z) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{2x - \pi} = 1$

31. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösteriniz. Bunu kullanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{3x^2} = \frac{1}{6}$
b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin x} = \frac{3}{2}$
c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x \sin x^3} = \frac{1}{4}$
d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \tan 3x} = \frac{1}{2}$
e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \tan x - 2 \sin \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}(1 - \cos \sqrt{x})} = -2$
f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{3x \tan x^2} = \frac{1}{3}$
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(1 - \cos x)}{1 - \cos(\sin x)} = 1$
h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2$
ı) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = 2$
i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{1}{x}) - 1}{\cos(\frac{2}{x}) - 1} = \frac{1}{4}$
j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin 4x)}{\sin^2(\sin 3x)} = \frac{8}{9}$

32. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x} = -\pi \ln 3$ olduğunu gösteriniz.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi 3^x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - \pi 3^x)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - \pi 3^x)}{\pi - \pi 3^x} \frac{\pi - \pi 3^x}{x} \\
&= \pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 3^x}{x} \\
&= -\pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \quad (3^x - 1 = t) \\
&= -\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_3(1+t)} \\
&= -\pi \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\log_3(1+t)^{\frac{1}{t}}} \\
&= -\pi \frac{1}{\log_3 e} \\
&= -\pi \ln 3
\end{aligned}$$

3 TÜREV VE UYGULAMALARI

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

a) $f(x) = \cot^2(\sin x)$

b) $f(x) = \tan^{-1}(x - \sqrt{1+x^2})$

2. $y = x^{1/2} - x^{3/2}$ eğrisinin hangi noktasındaki teğet doğruları ya yatay yada dikeydir? Açıklayınız.

3. Aşağıdaki fonksiyonların eğer varsa karşılığında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız. Fonksiyonlar bu noktalarda sürekli midirler?

- $f(x) = |x - 1|$, $a = 1$.

- $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $a = 2$.

- $f(x) = x|x|$, $a = 0$.

- $f(x) = x \lfloor x \rfloor$, $a = 0$.

- $f(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor & , x > 0 \\ x^2 & , x \leq 0 \end{cases}$, $a = 0$.

- $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, $a = 0$.

- $f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$, $a = 0$.

4. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız.

- $f(x) = (x^2 + 1)^3, x = 1$
- $f(x) = (1 + x^{-2})^{50}, x = 1$
- $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{10}, x = 0$
- $f(x) = x\sqrt{1+x^2}, x = 0$
- $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, x = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}, x = 1$
- $f(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}, x = 0.$

5. $f(x) = x^3 + 4x$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(5) = ?$

6. $f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 2$ ve $g(x) = (x^2 + 3)^4 f(x)$ olsun. $g'(0) = ?$

7. $g(0) = g'(0) = 0$ ve $f(x) = \begin{cases} g(x) \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ olsun. $f'(0)$ değerini bulunuz.

8. $y = x^3 - x^2 - x + 1$ eğrisi üzerinde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

9. Hangi x değerleri için $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 87$ fonksiyonunun grafiğinin yatay teğeti vardır?

10. $y = 6x^3 + 5x - 3$ eğrisinin, eğimi 4 olan bir teğet doğrusu olmadığını gösteriniz.

11. $y = x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orijinden geçer?

12. $y = x^2$ parabolünün $(0, -4)$ noktasından geçen iki teğet doğrusu olduğunu şekil çizerek gösteriniz. Bu iki teğet doğrusunun parabol ile kesiştiği noktaların koordinatlarını bulunuz.

13. $(2, -3)$ noktasından geçen ve $y = x^2 + x$ parabolüne teğet olan doğruların denklemini bulunuz.

14. Bir C eğrisinin P noktasındaki normal doğrusu, P den geçen ve C nin P noktasındaki teğetine dik olan doğru olarak tanımlanır. Buna göre $y = 1 - x^2$ eğrisinin $(2, -3)$ noktasındaki normal doğrusunu bulunuz.

15. $y = x - x^2$ parabolünün $(1, 0)$ noktasındaki normal doğrusu, parabol ile ikinci kez nerede kesişir?

16. Hangi a ve b değerleri için $2x + y = b$ doğrusu $y = ax^2$ parabolüne $x = 2$ apsilli noktada teğettir.

17. Grafiğinin $(-2, 6)$ ve $(2, 0)$ noktalarındaki teğetleri yatay olan ve $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ biçiminde verilen polinomu bulunuz.

18. y -ekseni üzerinde kesişen iki doğrunun, $y = x^2$ parabolüne teğet olduğu bir şekil çiziniz. Bu doğrular hangi noktada kesişir.
19. Türev yardımıyla $\sqrt{5}$ ve $\sqrt[4]{17}$ nin yaklaşık değerini hesaplayınız.
20. $\frac{d}{dx}f(2x) = x^2$ ise $f'(x) = ?$
21. $y = x\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$ eğrisinin hangi noktadaki teğeti ya yatay yada dikeydir.
22. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ eğrisinin $(-1, \frac{1}{2})$ noktasındaki teğetini bulunuz. Eğri ile teğeti aynı düzlemde çiziniz.
23. $h(2) = 4$, $h'(2) = -3$ ise $\frac{d}{dx}\left(\frac{h(x)}{x}\right) \Big|_{x=2} = ?$
24. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ eğrisine teğet olan doğrulardan kaç tanesi $(1, 2)$ noktasından geçer? Bu doğrular eğriye hangi noktada teğettir.
25. $y = \frac{x-1}{x+1}$ eğrisinin, $x - 2y = 2$ doğrusuna paralel olan teğet doğrularının denklemini bulunuz.
26. $y = x^2 + ax + b$ ve $y = cx - x^2$ eğrileri $(1, 0)$ noktasında ortak teğet doğrusuna sahiptir. a, b ve c sayılarını bulunuz.
27. $f(x) = \begin{cases} ax + b & , x > -1 \\ bx^2 - 3 & , x \leq -1 \end{cases}$ fonksiyonunun her yerde türevlenebilir olması için a ve b ne olmalıdır?
28. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.
- $f(x) = x^2 \tan x$
 - $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
 - $f(x) = \frac{\tan x}{x}$
 - $f(x) = \frac{x}{\sin x + \cos x}$
 - $f(x) = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$
 - $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x + \cos x}$
29. $y = x \cos x$ eğrisinin $(\pi, -\pi)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.
30. $y = \sin(\sin x)$ eğrisinin $(\pi, 0)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.
31. $y = \sec x - 2 \cos x$ eğrisinin $(\frac{\pi}{3}, 1)$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.
32. Hangi x değeri için $f(x) = x + 2 \sin x$ eğrisinin yatay teğeti vardır.
33. $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ eğrisi üzerinde teğetin yatay olduğu noktaları bulunuz.

34. Zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

- $f(x) = \sin 3x^2$
- $f(x) = \tan^3 x + \cos(x^2 + 1)$
- $f(x) = (\tan \sqrt{x})^5$
- $f(x) = \cos(\sin x)$
- $f(x) = \tan(\sin x)$
- $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$
- $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
- $f(x) = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x$
- $f(x) = (2 - 3 \cos x)^{\frac{3}{2}}$
- $f(x) = \sin^2(2x - 1)^{\frac{3}{2}}$

35. $\cos 62^\circ$ yi yaklaşık olarak hesaplayınız. ($62^\circ = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}$ olup $\Delta x = \frac{\pi}{90}$ alınız)

36. $\cos 43^\circ$ ve $\sin 32^\circ$ yi yaklaşık olarak hesaplayınız.

37. Zincir kuralını da dikkate alarak aşağıdaki fonksiyonların türevini hesaplayınız.

- $f(x) = \ln(x^3 + 1)$
- $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$
- $f(x) = x \ln(\sin x)$
- $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$
- $f(x) = \ln |x|$
- $f(x) = 2^{\cos 5x}$
- $f(x) = \ln(e^{-x} + xe^{-x})$
- $f(x) = e^{3x} \ln x - x$
- $f(x) = e^{\arctan x}$
- $f(x) = (1 + x^2)^x$
- $f(x) = x^{\sin x}$
- $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$
- $f(x) = x^{\ln x}$

38. x ve y reel sayılar olmak üzere f fonksiyonu

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + x^2y + xy^2$$

denklemini sağlasın. Ayrıca,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$$

verilsin.

- $f(0)$ değerini bulunuz.
- $f'(0)$ değerini bulunuz.
- $f'(x)$ fonksiyonunu bulunuz.

39. f, g, f' ve g' fonksiyonları için aşağıdaki değerler tablosu verilmiştir.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

- $h(x) = f(g(x))$ ise $h'(1)$ değerini bulunuz.
- $H(x) = g(f(x))$ ise $H'(1)$ değerini bulunuz.

40. $y = x^4 - 2x^2 - 4$ eğrisi üzerinde ortak teğet doğrusuna sahip noktalar varsa bulunuz. Cevabınızın Aşamalarınızı belirtiniz.

41. Aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- $f(x) = x - \sin x$ fonksiyonunun artan/azalan olduğu aralıkları bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.
- $y^2 = x \cos(x + y)$ ise **kapalı türevleme** yardımıyla y 'nin üçüncü türevi y''' 'nin $(\frac{\pi}{2}, 0)$ noktasındaki değerini bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.

42. $y^2 = 2x$ parabolü üzerinde bulunan $(1, 2)$ noktaya **en yakın** noktayı bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.

43. $f(x) = x^{4/3} - x - x^{1/3}$ fonksiyonu veriliyor.

- $f(x)$ 'in $[-1, 6]$ kapalı aralığındaki mutlak ekstremum değerlerini bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.
- $f(x) = 0$ denkleminin çözümleri sayısını bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.

44. $\sin(xy) + x = 1$ ise **kapalı türevleme** yardımıyla y 'nin üçüncü türevi y''' 'nin $(1, 0)$ noktasındaki değerini bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.

45. $y = x^2$ parabolü üzerinde bulunan $(0, 2)$ noktaya **en yakın** noktayı bulunuz. Cevabınızın aşamalarını belirtiniz.

46. $y = x - 3x^{1/3}$ eğrisinin grafiğini **tüm aşamaları** belirterek çiziniz.

47. $y = ax^2 + bx + c$ parabol eğrisi $(2, 15)$ noktadan geçmektedir. Ayrıca, bu parabol eğrisinin $x = 1$ noktasındaki teğetinin eğimi 4 ve $x = -1$ noktasındaki teğetinin eğimi 8 olduğu biliniyor. a, b ve c sabitlerini bulunuz.

48. a ve b sabitlerinin hangi değerleri için $(1, 6)$ noktası $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ eğrisinin bir büküm noktasıdır? Cevabımızın aşamalarını belirtiniz.
49. $(15)^{\frac{1}{4}}$ 'ün yaklaşık değerini türev yardımıyla hesaplayınız.
50. $f(x) = 2x + 3x^{2/3}$ eğrisinin grafiğini çiziniz.
51. $(x^2 + y^2)^3 = 8x^2y^2$ denklemi veriliyor. Önce **kapalı türevleme yöntemiyle** dy/dx bulunuz. Daha sonra bu denkleminin grafiğinin $(1, -1)$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.
52. $f(x) = x \arcsin(1 - x^2)$ fonksiyonu veriliyor.
- f fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.
 - f fonksiyonunun türevini bulunuz.
53. Aşağıdaki limitleri bulunuz.
- $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos(3x)}$
 - $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2} - x)$
54. $y = x^3 - 3x^2 + 5x$ eğrisinin hangi noktalarındaki teğeti en küçük eğime sahiptir? Açıklayınız.
55. $f(x) = 2 \sin x - \cos(2x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ fonksiyonunun artan, azalan olduğu aralıkları bulunuz.
56. c nin hangi değerleri için $P(x) = x^4 + cx^3 + x^2$ polinom fonksiyonu iki büküm noktasına sahiptir? Açıklayınız.
57. Aşağıdaki limitleri bulunuz. Cevabımızın aşamalarını belirtiniz.
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc^2 x - x^{-2})$
 - $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$, (a, b reel sabit)
58. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonu $(-2, 3)$ noktasında yerel maksimuma ve $(1, 0)$ noktasında yerel minimuma sahiptir. a, b, c ve d reel sabitlerini bulunuz. Cevabımızın aşamalarını belirtiniz.
59. $y = x(x - 1)^{2/3}$ eğrisinin grafiğini çiziniz. Cevabımızın aşamalarını belirtiniz.
60. $f(x) = \begin{cases} [x] & , x \geq 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $f'(0)$ var mıdır? Varsa bulunuz.

61. $f(x) = \begin{cases} \sin x & , x \geq 0 \\ \frac{1-\cos 2x}{2x} & , x < 0 \end{cases}$ ve $g(x) = \begin{cases} x-1 & , x < 1 \\ \frac{x^3-1}{3} & , x \geq 1 \end{cases}$ olsun. $(f \circ g)'(1) = ?$

62. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = 2$ ise $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-f(1-x)}{x} = ?$

63. $y = x^2 + 1$ eğrisinin $(1, 1)$ den geçen teğetlerinin denklemlerini bulunuz.

64. $y = x^{\frac{2}{3}} + 1$ eğrisinin aşağıda verilen noktalardan geçen teğeti var mıdır? Varsa bulunuz.

- $(0, -1)$
- $(0, 2)$

65. $f(x) = x^5 + x$ olsun. $(f^{-1})'(2) = ?$

66. $y = \sqrt[3]{x^2 - 3}$ eğrisinin orijinden geçen teğeti var mıdır? Varsa bulunuz.

67. $y = 4x - x^2$ eğrisinin $(-2, 4)$ noktasından geçen teğeti var mıdır? Varsa bulunuz.

68. $y = |4|x| - x^2|$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ eğrisinin $(1, 3)$ noktasından geçen teğeti varsa bulunuz.

69. $y = (x^2 - 1)(\|x\| + \|-x\|)$ eşitliği ile verilen $y = f(x)$ eğrisinin $(1, 0)$ noktasından geçen teğeti varsa bulunuz.

70. $y = |x| + \frac{1}{|x|}$ eğrisini çiziniz.

71. $y = \frac{x^2 - 2}{x}$, $y = \frac{x^3 - 1}{x}$, $y = \frac{x^2 - 2}{(x - 1)^2}$ eğrilerini çiziniz.

72. $y = 1 - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$ eğrisini çiziniz.

73. $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$ ve $g(x) = 1 - x^{\frac{1}{3}}$ eğrilerinin artan, azalan olduğu aralıkları, konveks, konkav olduğu aralıkları bulunuz.

74. $f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ x^3 - 3x & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını

bulunuz. Bu fonksiyonunu $[-1, 1]$ aralığındaki ekstremum değerlerini hesaplayınız. Aynı soruyu $[-2, 1]$ aralığı için cevaplayınız.

75. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ ve $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x < 0 \\ x^2 - 1 & x \geq 0 \end{cases}$ fonksiyon-

larının artan, azalan olduğu aralıkları, konveks, konkav olduğu aralıkları bulunuz. Bu fonksiyonların yerel ekstremum noktaları var mıdır? Varsa bulunuz.

76. $f(x) = \sin 3x$, $g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonları için $f^{(n)}(x)$ türevini hesaplayınız.
77. $f(x) = x^2$ ve $g(x) = |x|$ olsun. Bu durumda $(f \circ g)(x) = x^2$ ve $(g \circ f)(x) = x^2$ dir. g fonksiyonu $x = 0$ noktasında türevlenemez olmasına rağmen $f \circ g$ ve $g \circ f$ fonksiyonları bu noktada türevlenebilirler. Bu durum zincir kuralı ile çelişir mi? Neden?
78. $y = \frac{|x|}{\sqrt{2-x^2}}$ eğrisinin $(1, 1)$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.
79. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ fonksiyonu için $f''(0)$ var mıdır? Varsa hesaplayınız.
80. $x^3 + y^3 + (1-x)y = 0$ ile verilen $y = f(x)$ için $y''(1)$ var mıdır? Varsa bulunuz.
81. Taban yarıçapı 6 cm yüksekliği 10 cm olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?
82. Hipotenüsü $\sqrt{3}$ birim olan bir dik üçgen dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Oluşan koninin hacmi en fazla ne olur?
83. $(2, 0)$ noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını hesaplayınız.
84. Yarıçapı 6 cm olan küre içine yerleştirilebilen bir dik koninin hacmi en fazla ne olur?
85. Taban yarıçapı 6 cm yüksekliği 12 cm olan bir koninin içine bir başka koni ters ve tabanları paralel olacak şekilde yerleştiriliyor. Yerleştirilen koninin taban yarıçapı ve yüksekliği ne olmalıdır ki hacmi en fazla olsun.
86. Yarıçapı 2 cm olan bir yarı çemberin içine bir dikdörtgen yerleştirilecektir. Bu dikdörtgenin alanı en fazla ne olur.
87. $f(x) = (x^2 - 9)\sqrt{\left[\frac{x}{2}\right]}$ şeklinde tanımlı fonksiyonun $(3, 0)$ noktasındaki teğetin denklemini bulunuz.
88. $y = x^3 - 4x$ eğrisinin $(0, -2)$ noktasından geçen teğetin denklemini bulunuz. Teğet ile eğrinin kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz.
89. Hacmi 8π br³ olan dairesel dik silindir şeklinde kapalı bir kutu yapılmak isteniyor. Taban ve tavanda kullanılacak malzemenin metre karesi 5 lira, kenar için kullanılacak malzemenin metre karesi 10 liradır. Bu şartlara uygun bir kutu 350 liraya yapılabilir mi? Neden?
90. a ve b reel sayılarının hangi değerleri için $f(x) = \begin{cases} 3x & , x \leq 1 \\ a + bx & x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu türevlenebilir?

91. $f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ fonksiyonunun \mathbb{R} de konveks olması için a ne olmalıdır?
92. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$ fonksiyonunun varsa bütün yerel ekstremumlarını, büküm noktalarını ve konveks konkav olduğu aralıkları belirleyiniz.
93. $y = y(x)$ olmak üzere $x^2 + xy + y^2 - 3y = 0$ eğrisine $P(2, 3)$ noktasında dik olan doğrunun denklemini bulunuz.
94. $f(x) = ax^2 + bx + c$ fonksiyonunun $x_0 = 1$ noktasındaki yerel ekstremum değerinin 7 olması ve grafiğinin $P(2, -2)$ noktasından geçmesi için a, b, c sabitleri ne olmalıdır?
95. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ fonksiyonunun $P(0, 3)$ noktasında bir yerel ekstreme ve $Q(1, -1)$ noktasında büküme sahip olması için a, b, c, d sabitleri ne olmalıdır?